

Вопросы по курсу “Алгебра, 3 семестр” (Казахстанский филиал МГУ)

1. Определение группы. Примеры групп. Гомоморфизм групп. Изоморфизм групп.
2. Подгруппы. Циклические группы. Подгруппы циклических групп. Классификация циклических групп.
3. Смежные классы, их свойства. Теорема Лагранжа и её следствия.
4. Нормальные подгруппы. Фактор-группа. Теорема о гомоморфизме.
5. Теоремы об изоморфизме.
6. Теорема о подгруппах и фактор-группах циклической группы.
7. Прямое произведение групп (внешнее), прямое произведение подгрупп, изоморфизм между ними.
8. Действие группы на множестве. Примеры. Теорема Кэли.
9. Орбиты и стабилизаторы.
10. Теорема о центре конечной p -группы.
11. Первая теорема Силова.
12. Вторая теорема Силова.
13. Третья теорема Силова.
14. Коммутант группы, его свойства.
15. Разрешимые группы, их свойства. Разрешимость группы верхнетреугольных матриц.
16. Разрешимость конечной p -группы. Разрешимость группы порядка pq (где p, q — простые числа).
17. Простые группы. Простота групп A_n при $n \geq 5$.
18. Простота группы $SO_3(\mathbb{R})$.
19. Конечно порождённые абелевы группы. Свободные абелевы группы. Подгруппы свободных абелевых групп.
20. Теорема о существовании согласованных базисов свободной конечно порождённой абелевой группы и её подгруппы.
21. Разложение конечно порождённой абелевой группы в прямую сумму бесконечных и примарных циклических групп (существование и единственность).
22. Ассоциативные кольца, идеалы. Фактор-кольцо. Теорема о гомоморфизме.
23. Поля. Расширения полей. Теорема о башне полей.
24. Присоединение корня многочлена к полю. Свойство минимальности простого алгебраического расширения.

25. Поле разложения многочлена, его свойство минимальности. Единственность поля разложения многочлена с точностью до изоморфизма.
26. Характеристика поля. Порядок конечного поля. Существование и единственность поля заданного примарного порядка.
27. Теорема о строении мультипликативной группы конечного поля.
28. Группа автоморфизмов конечного поля. Условие вложимости для конечных полей.
29. Алгебры над полем. Алгебраические элементы, алгебраические алгебры. Подалгебра алгебраических элементов коммутативной алгебры.
30. Поле алгебраических чисел, его алгебраическая замкнутость.
31. Алгебры над полями действительных и комплексных чисел. Конечномерные алгебры с делением над $\mathbb{C}$.
32. Коммутативные конечномерные алгебры с делением над $\mathbb{R}$.
33. Тело кватернионов, его базис, структурные константы. Теорема Фробениуса.
34. Представление групп. Примеры. Эквивалентность представлений, условие эквивалентности представлений в матричной записи.
35. Неприводимые представления. Вполне приводимые представления. Теорема Машке.
36. Лемма Шура. Кратность неприводимого подпредставления, её инвариантность.
37. Кратность неприводимого подпредставления в регулярном комплексном представлении.
38. Комплексные представления коммутативных конечных групп. Одномерные комплексные представления произвольных конечных групп.
39. Количество неприводимых комплексных представлений конечной группы